Geometria iperbolica 22-04

Def: $\Delta_1, \dots, \Delta_{2k}$ # pari di copie del 2-simplesso orientato.

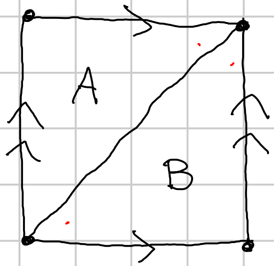
Una **triangolazione** è il dato di una partizione dei $6k$ spigoli in $3k$ coppie e, per ogni coppia $\{s_1, s_2\}$ di un'isometria da s_1 a s_2.

La triangolazione è **orientata** se le isometrie simpliciali sono orientation-reversing.

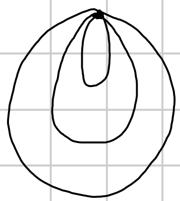
T triangolazione $\rightsquigarrow$ S spazio topologico ottenuto identificando i triangoli lungo i lati nel modo specificato dalle isometrie di T

Fatto: se T è orientata, S è sempre una superficie chiusa e orientabile
$S = S_g$

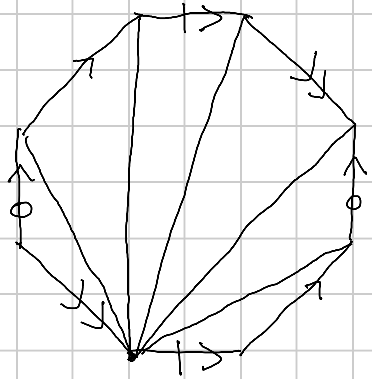
Esempi:

1)  $= T^2$

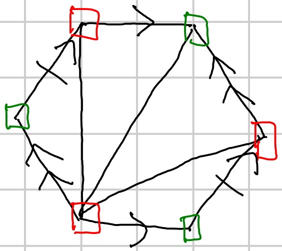
1 vertice
3 spigoli $\Rightarrow \chi = 0$
2 triangoli



! Non è un complesso simpliciale

2) S_2 

1 vertice
9 spigoli $\Rightarrow \chi = -2$
6 triangoli

3) 

2 vertici
6 spigoli $\quad \chi = 0$
4 triangoli

Data una triangolazione T associata a S_g, sia Σ la superficie non compatta ottenuta rimuovendo tutti i vertici di T dalla superficie S_g.

1) $\Sigma = T^2 \setminus \{p\} = S_{1,0,1}$ $\qquad$ 2) $S_{2,0,1}$ $\qquad$ 3) $S_{1,0,2}$

- $\chi(\Sigma) = -k < 0$, dove $2k$ è il # di triangoli di T.

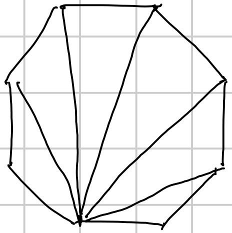
$\chi(\Sigma) = \chi(S) - v = v - 3k + 2k - v = -k$.

Una triangolazione di questo tipo si dice una <u>triangolazione ideale</u> di Σ

Σ è una superficie con punture $\Sigma = S_{g,0,p}$

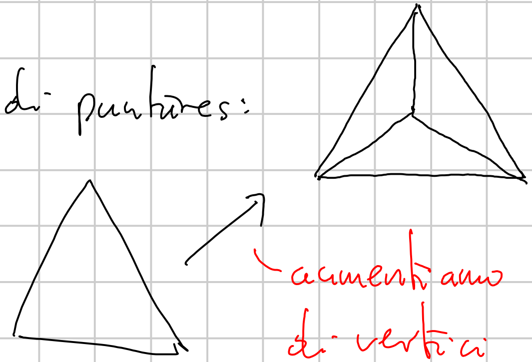
Prop: Ogni superficie $\Sigma = S_{g,0,p}$ t.c. $\chi(\Sigma) < 0$ ammette una triangolazione ideale.

S_g si ottiene identificando il lato opposti di $4g$-agono



$\Sigma = S_{g,0,1}$ ammette una triangolazione ideale

Per incrementare il numero di punture:



aumentiamo di 1 il # di vertici

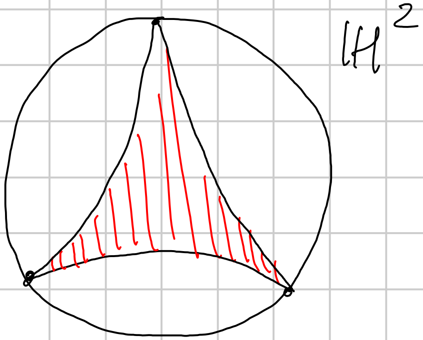
$\Sigma_{g,0,p}$ ok

arbitrario

Triangolazioni ideali iperboliche:

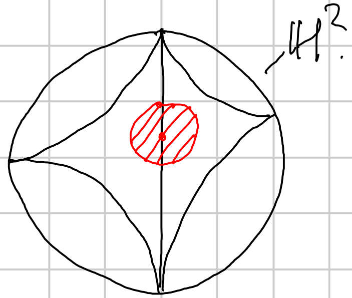
Sia T una triangolazione orientata con triangoli $\Delta_1, \dots, \Delta_{2k}$.

Sostituiamo ogni Δ_i con un triangolo ideale iperbolico (unico a meno di isometria)

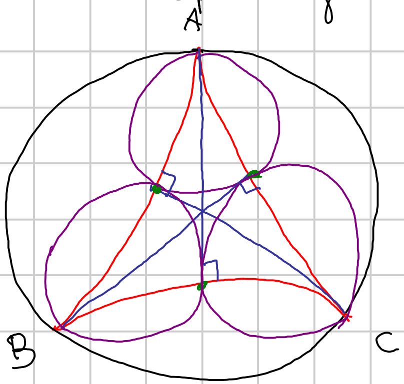


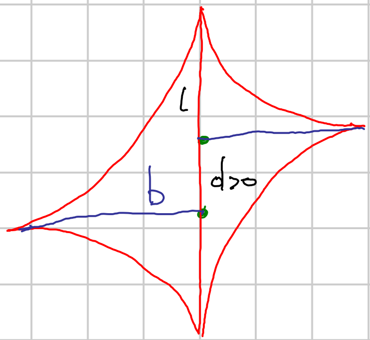
e identifichiamo gli spigoli tramite isometrie che invertono l'orientazione come prescritto dalla triangolazione.

Otteniamo una superficie con punture $\Sigma = S_{g,0,p}$ con una metrica iperbolica di area $2k\pi$. (Area di un triangolo ideale è π).



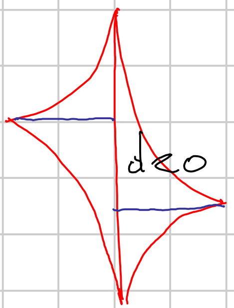
Attenzione: i lati di un triangolo ideale hanno lunghezza infinita → l'isometria di incollamento non è unica. C'è una famiglia a un parametro reale di possibili incollamenti (per ogni spigolo della triangolazione).





d distanza con segno tra i punti medi sullo spigolo in comune

$d>0$ se un osservatore che arriva sul lato in comune ℓ lungo una bisettrice b "vede" l'altro punto medio alla sua sinistra.



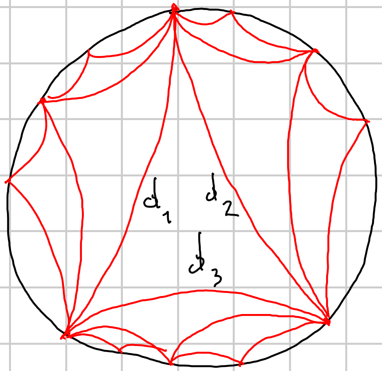
Osservazione: la struttura iperbolica è determinata dalle coordinate di shear $d=(d_1,\dots,d_{3k})$ $(k=-\chi(\Sigma))$.

Attenzione: la metrica può essere non completa!

? Quali scelte per $d=(d_1,\dots,d_{3k})$ producono metriche complete?

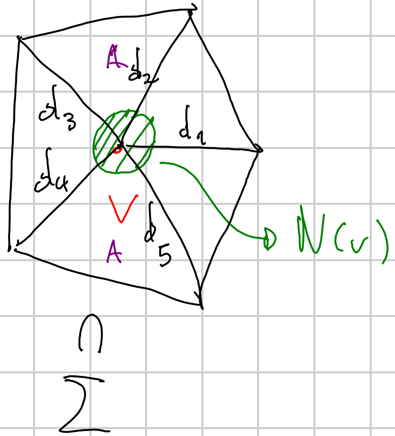
- Mappa sviluppante $D:\tilde{\Sigma}\longrightarrow \mathbb{H}^2$ mappa sviluppante.

L'olonomia: $\varphi : \pi_1(\Sigma) \longrightarrow \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$. Quando D è un omeomorfismo.



$\longrightarrow$ D è iniettiva. Quando è surgettiva?

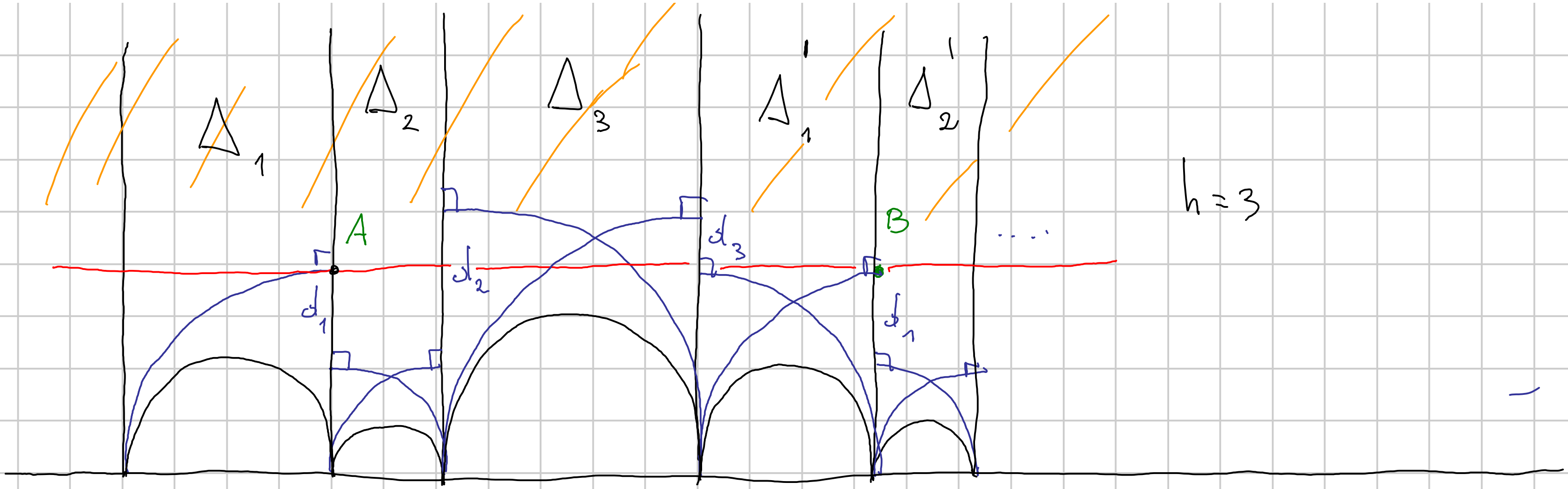
∘ Dato un vertice v di T, questo sarà adiacente ad h triangoli $\Delta_1, \dots, \Delta_h$ (con possibili ripetizioni). e ad ad h spigoli con coordinate di shear $d_1, \dots, d_h$



Sia $N(v)$ un piccolo disco chiuso intorno al vertice v

Prop: La metrica indotta su $N(v)$ è completa se e solo se $\boxed{d_1 + \dots + d_h = 0}$ – equazioni di completezza.

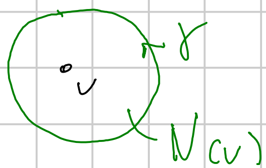
Dim: Modello del semipiano. Mandiamo v a ∞. e sviluppiamo la triangolazione orizzontalmente



Se $d_1 + \dots + d_h = 0$ i punti medi A e B di Δ_1 e Δ_1' sono alla stessa altezza.

Sia $\varphi \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2) = \mathbb{P}SL_2(\mathbb{R})$ l'isometria dell'olonomia che manda Δ_1 in Δ_1'

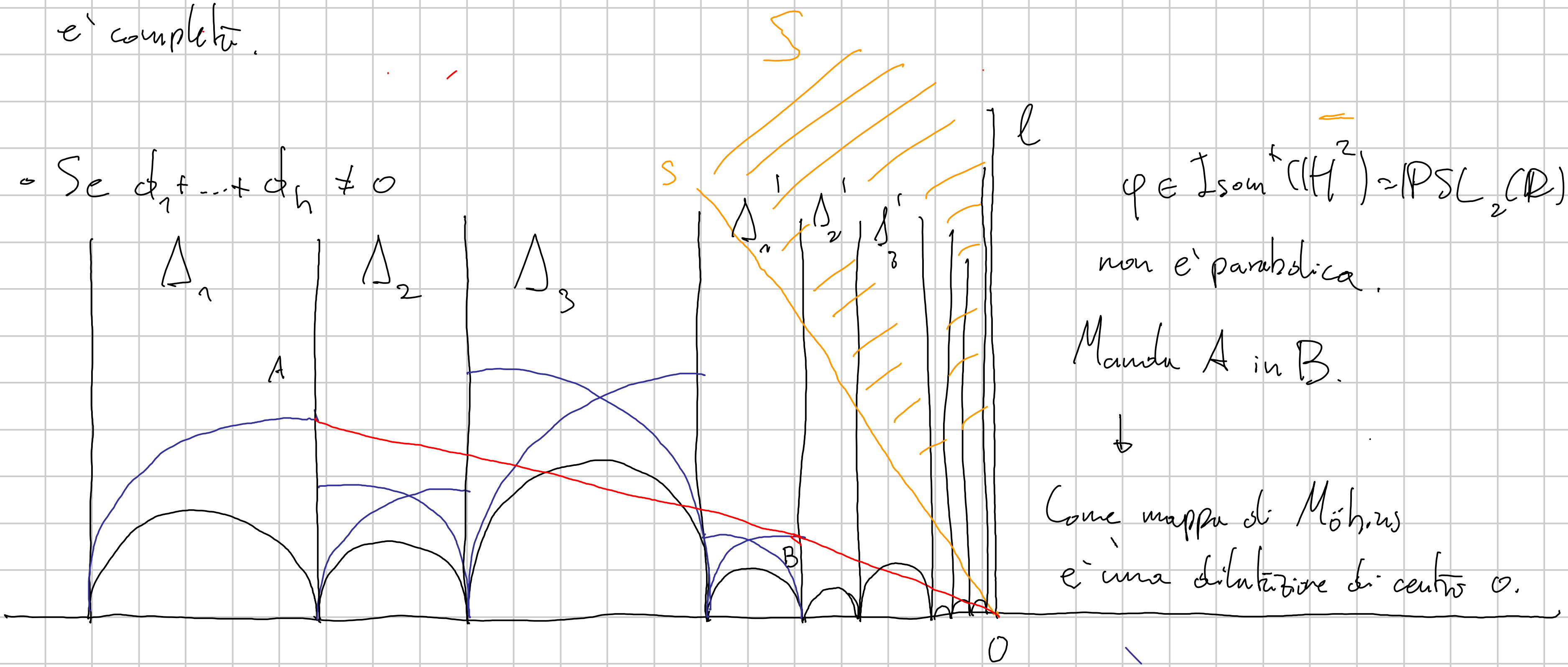
φ è l'immagine tramite l'olonomia di γ



Allora φ è un'isometria parabolica $z \mapsto z+b$, $b \in \mathbb{R}$.

Per cui $N(v)$ è (metricamente) la troncatura di una cuspide $\mathbb{H}^2/\langle\varphi\rangle$, che è completa.

- Se $d_1 + \dots + d_h \neq 0$



$\varphi \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2) = PSL_2(\mathbb{R})$ non è parabolica.

Manda A in B.

$\downarrow$

Come mappa di Möbius è una dilatazione di centro O.

Corrisponde a una traslazione
lungo ℓ.

$$\varphi(z) = e^{d} \cdot z, \text{ con } d = d_1 + \dots + d_h$$

La mappa sviluppante "sviluppa" verso la geodetica ℓ, ma $\ell \notin \mathrm{Im}(D) \Rightarrow \mathrm{Im}(D) \subsetneq \mathbb{H}^2$

Corollario: La struttura iperbolica su Σ è completa $\Leftrightarrow d = (d_1, \dots, d_{3k})$ soddisfa le equazioni di completezza per ogni vertice della triangolazione.

Dim: Se d non soddisfa un'equazione di completezza $\Rightarrow$ $\mathrm{Im}(D) \neq \mathbb{H}^2 \Rightarrow$ metrica non completa.

Se $d = (d_1, \dots, d_{3k})$ soddisfa le equazioni di completezza.

$\Sigma = \bigcup_v N(v)$ è compatto $\Rightarrow$ completo

Σ è completa $\Leftrightarrow$ ogni $N(v)$ è completo, cioè se e solo se tutte le equazioni di completezza sono soddisfatte.

- Sia $V \subset \mathbb{R}^{3k}$ lo spazio delle soluzioni alle equazioni di completezza.

$$\dim V \geq 3k - \underset{\#\text{punture}}{p} = -3\chi(\Sigma) - p.$$

Abbiamo costruito mappa di shear

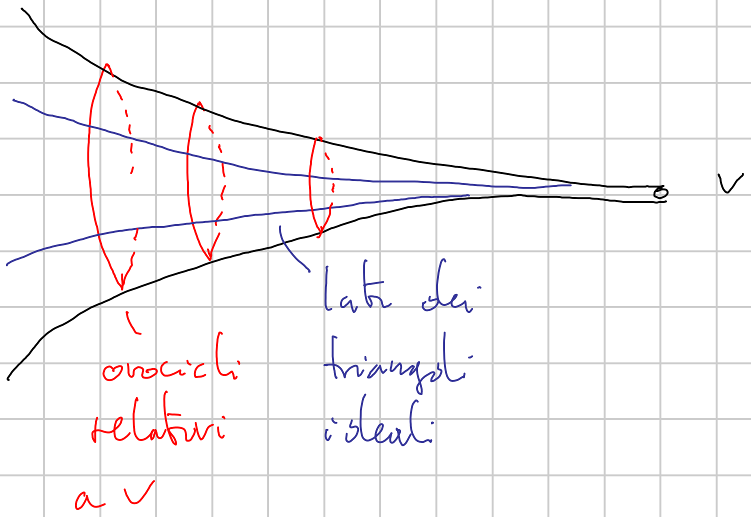
$$sh : V \to \mathrm{Teich}(\Sigma)$$

Prop: sh è un omeomorfismo

(Σ sup. iperbolica completa con punture. Ogni triangolazione ideale è isotopa a un'unica triangolazione geodetica).

- Nel caso incompleto, come è fatto il completamento metrico?

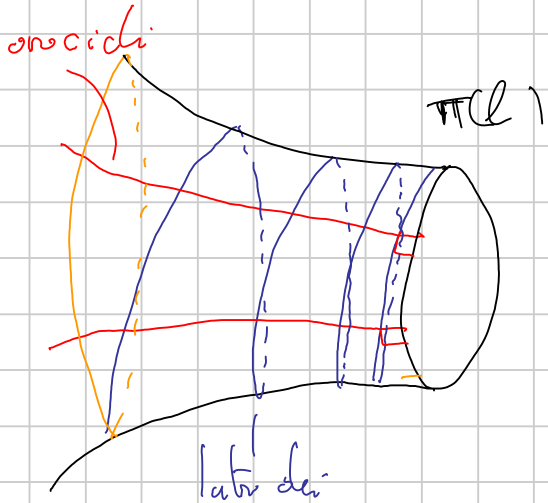
Caso completo



Caso incompleto

$S = \{x \in \mathbb{H}^2 \mid d(x, \ell) \leq R,\ Re(x) \leq 0\}$

$s = \{x \in \mathbb{H}^2 / d(x, \ell) = R\} \cap S$



ℓ si proietta a un cerchio $\pi(\ell)$ geodetica di lunghezza $|d_v|$

$|d_1 + \dots + d_n|$

devo aggiungerlo per ottenere il completamento metrico